

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2024

ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и CM и высота BP . Из точки P на стороны AB и AC опущены перпендикуляры PD и PE . Отрезки DE и KM пересекаются в точке F . Прямая, проходящая через точку P параллельно BF , пересекает отрезок BM в точке X и луч KB в точке Y . Докажите, что X , Y и ортоцентры треугольников ABC и XYU лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE . Окружность, описанная около треугольника BDC , вторично пересекает отрезки BE и CE в точках E_1 и E_2 соответственно. Описанная окружность треугольника BEC пересекает отрезок AD в точке D_1 , а луч BD в точке D_2 , отличной от B . Прямая D_1D_2 пересекает отрезок AB в точке B_1 , прямая E_1E_2 пересекает отрезок AC в точке C_1 . Докажите, что $BC \parallel B_1C_1$.

3. Петя и Вася играют в игру на доске 101×101 . Они по очереди (начинает Петя) выбирают клетку, которая до этого никем не была выбрана, и проводят в ней красный отрезок от середины одной стороны до середины противоположной, причём Петя проводит только вертикальные отрезки, а Вася только горизонтальные. Игра заканчивается, когда в каждой из 101^2 клеток будет проведён отрезок. После этого Петя находит на доске самый длинный вертикальный красный отрезок, а Вася — горизонтальный. Выигрывает тот, у кого отрезок длиннее (если длины равны — игра заканчивается ничьей). Каким будет результат при правильной игре обоих игроков?

4. Стороны треугольника T_2 на 1 больше соответствующих сторон треугольника T_1 . Верно ли, что треугольник T_1 всегда можно накрыть треугольником T_2 ?

5. Пусть n — натуральное число, а $p \neq n$ — простое такое, что $\frac{p+1}{2}$ также простое, а число $\frac{p^2+n}{p+n^2}$ — целое. Докажите, что $p-1$ — точный квадрат.

6. Миша написал на длинной полоске бумаги в каком-то порядке некоторые из чисел $2, 2^2, \dots, 2^{1917}$, возможно, с повторениями, а Вася на своей полоске какое-то количество раз написал число 2^{1918} . Могут ли полученные последовательности цифр совпасть?

7. На вечеринке присутствуют n человек. Среди них не более n пар друзей и у каждого человека есть хотя бы один друг. Два человека пожимают друг другу руки тогда и только тогда, когда у них есть хотя бы 1 общий друг. Дано целое число $m \geq 3$ такое, что $n \leq m^3$. Докажите, что существует человек, для которого количество людей, пожимавших ему руку, не больше количества его друзей, умноженного на $m-1$.

8. Последовательность a_1, a_2, \dots натуральных чисел такова, что $a_n \leq 3n$ при всех n , а $a_m + a_n$ при всех m и n содержит 2 в той же степени, что и $m+n$. Докажите, что каждое кратное 3 встречается в последовательности (a_n) ровно один раз.

9. вещественные числа a, b, c удовлетворяют условию

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 11.$$

Докажите, что

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 19.$$

10. На окружности отмечено $2n$ точек: n красных и n синих. На одной из красных точек сидит красная лягушка, а на одной из синих сидит синяя. Каждую минуту красная лягушка перепрыгивает на следующую по часовой стрелке красную точку, и одновременно с ней синяя лягушка перепрыгивает на следующую против часовой стрелки синюю точку. Докажите, что для любого изначального расположения лягушек можно провести прямую так, что лягушки всегда будут находиться по разные стороны от этой прямой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2024

ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC с углом при основании α . На отрезке AM отмечена точка D . Центр P окружности (BCD) лежит внутри треугольника BMC , точка Q — центр окружности (ABD) . Оказалось, что $\angle PMQ = 90^\circ + \alpha$. Докажите, что биссектрисы углов PMQ и MBD параллельны.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE . Окружность, описанная около треугольника BDC , вторично пересекает отрезки BE и CE в точках E_1 и E_2 соответственно. Описанная окружность треугольника BEC пересекает отрезок AD в точке D_1 , а луч BD в точке D_2 , отличной от B . Прямая D_1D_2 пересекает отрезок AB в точке B_1 , прямая E_1E_2 пересекает отрезок AC в точке C_1 . Докажите, что $BC \parallel B_1C_1$.

3. Петя и Вася играют в игру на доске 101×101 . Они по очереди (начинает Петя) выбирают клетку, которая до этого никем не была выбрана, и проводят в ней красный отрезок от середины одной стороны до середины противоположной, причём Петя проводит только вертикальные отрезки, а Вася только горизонтальные. Игра заканчивается, когда в каждой из 101^2 клеток будет проведён отрезок. После этого Петя находит на доске самый длинный вертикальный красный отрезок, а Вася — горизонтальный. Выигрывает тот, у кого отрезок длиннее (если длины равны — игра заканчивается ничьей). Каким будет результат при правильной игре обоих игроков?

4. Стороны треугольника T_2 на 1 больше соответствующих сторон треугольника T_1 . Верно ли, что треугольник T_1 всегда можно накрыть треугольником T_2 ?

5. Пусть n — натуральное число, а $p \neq n$ — простое такое, что $\frac{p+1}{2}$ также простое, а число $\frac{p^2+n}{p+n^2}$ — целое. Докажите, что $p-1$ — точный квадрат.

6. Простое число назовём *особым*, если на него делится сумма всех меньших простых чисел. Могут ли два последовательных простых числа быть особыми?

7. На вечеринке присутствуют n человек. Среди них не более $n-1$ пары друзей и у любого человека есть хотя бы один друг. Два человека пожимают друг другу руки тогда и только тогда, когда у них есть хотя бы 1 общий друг. Дано целое число $m \geq 3$ такое, что $n \leq m^3$. Докажите, что существует человек, для которого количество людей, пожимавших ему руку, не больше количества его друзей, умноженного на $m-1$.

8. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n . Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать так, чтобы для любых двух выбранных чисел a и b выполнялось условие: « a делится на b тогда и только тогда, когда $s(a)$ делится на $s(b)$ »?

9. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют условию

$$(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} \right) = 11.$$

Докажите, что

$$(a^2+b^2+c^2+d^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \right) \geq 324.$$

10. На окружности отмечено $2n$ точек: n красных и n синих. На одной из красных точек сидит красная лягушка, а на одной из синих сидит синяя. Каждую минуту красная лягушка перепрыгивает на следующую по часовой стрелке красную точку, и одновременно с ней синяя лягушка перепрыгивает на следующую против часовой стрелки синюю точку. Докажите, что для любого изначального расположения лягушек можно провести прямую так, что лягушки всегда будут находиться по разные стороны от этой прямой.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 28.11.2024

ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC с углом при основании α . На отрезке AM отмечена точка D . Центр P окружности (BCD) лежит внутри треугольника BMC , точка Q — центр окружности (ABD) . Оказалось, что $\angle PMQ = 90^\circ + \alpha$. Докажите, что биссектрисы углов PMQ и MBD параллельны.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и CE . Окружность, описанная около треугольника BDC , вторично пересекает отрезки BE и CE в точках E_1 и E_2 соответственно. Описанная окружность треугольника BEC пересекает отрезок AD в точке D_1 , а луч BD в точке D_2 , отличной от B . Прямая D_1D_2 пересекает отрезок AB в точке B_1 , прямая E_1E_2 пересекает отрезок AC в точке C_1 . Докажите, что $BC \parallel B_1C_1$.

3. Петя и Вася играют в игру на доске 101×101 . Они по очереди (начинает Петя) выбирают клетку, которая до этого никем не была выбрана, и проводят в ней красный отрезок от середины одной стороны до середины противоположной, причём Петя проводит только вертикальные отрезки, а Вася только горизонтальные. Игра заканчивается, когда в каждой из 101^2 клеток будет проведён отрезок. После этого Петя находит на доске самый длинный вертикальный красный отрезок, а Вася — горизонтальный. Выигрывает тот, у кого отрезок длиннее (если длины равны — игра заканчивается ничьей). Каким будет результат при правильной игре обоих игроков?

4. Верно ли, что можно увеличить две стороны любого треугольника на 1, сохранив угол между ними, таким образом, чтобы третья сторона увеличилась хотя бы на 1?

5. Пусть n — натуральное число, а $p \neq n$ — простое такое, что $\frac{p+1}{2}$ также простое, а число $\frac{p^2+n}{p+n^2}$ — целое. Докажите, что $p-1$ — точный квадрат.

6. Простое число назовём *особым*, если на него делится сумма всех меньших простых чисел. Могут ли два последовательных простых числа быть особыми?

7. В Хогвартсе есть несколько лестничных площадок, соединенных волшебными лестницами. Каждая площадка соединена ровно с половиной из остальных. Ровно в 12 дня каждая лестница должна переместиться так, чтобы один из ее концов остался на прежней площадке, а другой передвинулся бы к другой площадке. Докажите, что Дамблдор может организовать этот процесс так, чтобы после перемещения каждая площадка оказалось соединена ровно с теми площадками, с которыми не была соединена ранее.

8. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр натурального числа n . Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать так, чтобы для любых двух выбранных чисел a и b выполнялось условие: « a делится на b тогда и только тогда, когда $s(a)$ делится на $s(b)$ »?

9. Найдите все вещественные числа a, b, c такие, что квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет следующим условиям: $|f(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$ и $f(x) \geq 7$ при $x \geq 2$.

10. На окружности отмечено $2n$ точек: n красных и n синих. На одной из красных точек сидит красная лягушка, а на одной из синих сидит синяя. Каждую минуту красная лягушка перепрыгивает на следующую по часовой стрелке красную точку, и одновременно с ней синяя лягушка перепрыгивает на следующую против часовой стрелки синюю точку. Докажите, что для любого изначального расположения лягушек можно провести прямую так, что лягушки всегда будут находиться по разные стороны от этой прямой.